Z termodynamiki wydłużeń

ciał sprężystych.

Napisał

Kazimierz Olearski.

Sir W. Thomson [1]) wyprowadził z zasady Carnota wzór:

$$\Theta = \frac{T \,.\, \alpha' \,.\, p}{A \,.\, c_p \,.\, \rho}$$

pozwalający obliczyć podwyższenie temperatury Θ, pochodzące z adyabatycznego wywarcia ciśnienia p, jeżeli znana jest bezwzględna temperatura T ciała sprężystego, jego gęstość ρ, ciepło właściwe przy stałem ciśnieniu c_p, spółczynnik rozszerzalności α', mechaniczny równoważnik ciepła A. Wzór ten zastosował Thomson do wydłużeń ciał sprężystych; p oznacza w tym razie napięcie [2]) na jednostkę powierzchni, α' spółczynnik rozszerzalności pod stałem napięciem, c_p ciepło właściwe przy stałem napięciu. Ciągnienie o wielkości p (na jednostkę powierzchni) sprawia obniżenie temperatury Θ.

---

[1]) W. Thomson. *On the dynamical theory of heat with numerical results deduced from Mr. Joule's equivalent of a thermal unit and M. Regnault's observations on steam.* Edinb. Trans. t. XX.

[2]) Przez napięcie rozumiemy siłę na jednostkę powierzchni wziętą, sprawiającą odkształcenie, zatem to, co oznacza angielski wyraz: „*stress*“, w Boguskiego tłumaczeniu fizyki Daniella słowem: „wysił“ nazwany.

Wzór Thomsona, zastosowany do jednokierunkowego wydłużenia drutów, niejednokrotnie starano się sprawdzić doświadczeniem. Prócz doświadczeń Joulea [1]), w których sposób oznaczania obniżenia temperatury nie był dość pewny, istnieją bardzo dokładne doświadczenia Edlunda [2]), Hagi [3]) i Wassmutha [4]).

Zupełnie zgodnie okazały wszystkie doświadczenia, że przebieg zjawiska dobrze jest określony wzorem Thomsonowskim, obniżenie temperatury jest przynajmniej przybliżenie proporcyjonalne do napięcia p; natomiast co do bezwzględnej wielkości, rezultaty nie są zgodne. Edlund wyprowadził z swoich doświadczeń wniosek, że wzór Thomsona daje zniżkę temperatury za wielką, że, aby otrzymać wielkość z doświadczeniem zgodną, potrzeba za mechaniczny równoważnik ciepła podstawić 682·7. Wynik taki ze wszech względów zadziwiający, w swoim czasie był przedmiotem dość obszernej dyskusyi. Verdet, St. Robert [5]), Dahlander [6]), prócz samego Edlunda, napróżno usiłowali wykryć przyczynę różnicy między teoryją a doświadczeniem. Zwrócono przytem uwagę na tę okoliczność, że tak ciepło właściwe, jak spółczynnik rozszerzalności przy stałem napięciu, jakkolwiek prawdopodobnie nie wiele różne od od ciepła właściwego i spółczynnika rozszerzalności pod stałem ciśnieniem, właściwie nie są znane. Praca Dahlandera dała w tym względzie po części przynajmniej pożądane wyjaśnienie — okazała mianowicie, że spółczynnik rozszerzalności zależy od napięcia i jest tem większy, im większe napięcie, że zatem wzór Thomsona, gdyby do obliczenia używać prawdziwej jego wielkości, prowadziłby do większych jeszcze zniżek temperatury.

---

[1]) Joule. *On the thermoelectricity of ferrugineous metals and on the thermal effects of stretching solid bodies.* Phil. Mag. 8. — *On the thermal effects of longitudinal compression of solids.* Phil. Mag. 8.

[2]) Edlund. *Quantitative Bestimmung der bei Volum-Veränderung der Metalle entstehenden Wärmephänomene und des mechanischen Wärmeaequivalentes unabhängig von der inneren Arbeit der Metalle.* Pogg. Ann. 126.

[3]) Haga. *Bestimmung der Temperaturänderungen beim Ausdehnen u. Zusammenziehen von Metalldräten und des mechanischen Wärmeaequivalentes.* Wied. Ann. B. 15.

[4]) Wassmuth. *Über eine einfache Vorrichtung zur Bestimmung der Temperaturänderungen beim Ausdehnen und Zusammenziehen von Metalldrähten.* — Exners *Repertorium der Physik* t. 24, r 1888.

[5]) St. Robert. *Des changements de température produits dans les corps solides de forme prismatique par une traction longitudinale.* Ann. de chim. et de phys. 4-éme Serie V. 14.

[6]) Dahlander. *Versuch den Ausdehnungscoefficienten von Metalldrähten bei ungleichen Spannungs-Graden zu bestimmen.* Pogg. Ann. B. 145.

Owóż, kiedy mimo tych dość licznych usiłowań, doświadczeń Edlunda, niezaprzeczenie starannych i dokładnych, z teoryją pogodzić nie zdołano, doświadczenia Hagi i Wassmutha dają rezultaty z teoryją zupełnie zgodne. Haga mianowicie otrzymał z doświadczeń wykonanych na dwu różnych drutach i z zastosowania wzoru Thomsona na mechaniczny równoważnik kaloryi wartości 437·8 i 428·1, Wassmuth z użycia drutu żelaznego 422·8. Użyto w obliczeniu tych doświadczeń, zamiast ciepła właściwego i spółczynnika rozszerzalności, przy stałem napięciu dobrze znanego ciepła właściwego i spółczynnika rozszerzalności pod stałem ciśnieniem. W obec tych niepewności sądzimy, że następujące nasze uwagi nie będą pozbawione interesu. Zamierzamy więc w 1ym ustępie tego rozbioru okazać, że wzór Thomsona jest właściwie tylko przybliżony, otrzymuje się po opuszczeniu wielkości nieznacznych w obec zatrzymanych, że zatem z przybliżeniem zupełnie dostatecznem powinien dawać rezultaty z doświadczeniem zgodne; w ustępie drugim okażemy, że samo zastosowanie prawa zachowania energii wystarcza, aby znaleść związek między ciepłem właściwem przy stałem napięciu albo stałem odkształceniu i między ciepłem właściwem przy stałem ciśnieniu. Trzeci rozdział okaże, że lepsza interpretacyja doświadczeń Edlunda do lepszej zgody z teoryją prowadzi. Przy innej sposobności zamierzamy okazać, jakiej modyfikacyi wymaga teoryja w zastosowaniu do wydłużeń kauczuku, i jaka może być przyczyna tego faktu, że spółczynnik rozszerzalności kauczuku w jednym kierunku skutkiem silnego napięcia wydłużonego jest ujemny.

I.

Przypuszczamy, że drut poddany jednokierunkowemu napięciu p rozszerza się przy wzrastającej temperaturze w ten sposób, jak niewydłużony, t. j. że spółczynnik rozszerzalności α jest ten sam jak drutu niewydłużonego. Obok tego liczymy jednak osobno pomniejszenie spółczynnika sprężystości wydłużenia, pochodzące z podwyższenia temperatury o dT. Jeżeli więc skutkiem wyciągnienia drutu temperatura obniży się, to naprzód długość drutu zmniejszy się skutkiem zniżki temperatury, przyczem i poprzeczne wymiary również się zmniejszą, a dalej wy-

dłużenie (jednokierunkowe odkształcenie) pomniejszy się z powodu pomniejszenia spółczynnika sprężystości.

Energiję drutu możemy uważać za funkcyję temperatury bezwzględnej T i napięcia p. Samo podwyższenie temperatury o dT nie tylko wymaga ciepła, ale wykonania pewnej pracy (przeciw sile sprężystości drutu). Dla jaśniejszego pojęcia rzeczy, wyobraźmy sobie, że napięcie pochodzi z ciężaru zawieszonego u dolnego końca drutu. Między jednostajnem we wszystkich kierunkach rozszerzaniem pod wpływem ciepła, a naszem jednokierunkowem wydłużeniem, istnieje ta różnica, że w pierwszym przypadku ciało sprężyste rozszerzając się wykonywa pracę, w drugim przypadku na drucie jest wykonana praca. Zasadniczo nie robi to różnicy w zastosowaniu zasad termodynamiki, podobnie jak obojętną jest rzeczą, czy praca zewnętrzna pochodzi z wyparcia ciśnienia zewnętrznego, czy jest innym rodzajem pracy zewnętrznej. W ostatnich latach rozszerzono znacznie zakres termodynamiki, stosując jej zasady do zjawisk, w których praca zewnętrzna polega, nie jak w pierwszych zastosowaniach zasady Carnota, na rozszerzaniu ciała znajdującego się pod jednakiem we wszystkich kierunkach ciśnieniem, ale jest np. pracą elektryczną, pracą wykonaną na sile ciężkości itd.

Jeżeli p oznacza napięcie, da nieskończenie małe odkształcenie przy napięciu p dokonane, elementarna praca, obliczona na jednostkę objętości, przy tem odkształceniu wykonana, wynosi $p.da$. Jeżeli v oznacza objętość jednostki masy, praca odpowiednia jest równa $v.p.da$. Długość drutu pierwotnie wynosząca l, skutkiem podwyższenia temperatury o dT, powiększa się o $l.\alpha.dT$, praca wykonana skutkiem tego wynosi $q.p.l.\alpha.dT$, jeżeli przez q oznaczymy przekrój drutu.

Otóż, aby temperaturę drutu powiększyć o dT, napięcie o dp, siłę zatem ciągnącą o $q.dp$, potrzeba dostarczyć ilości ciepła dQ, albo w jednostkach pracy mechanicznej AdQ (A mechaniczny równoważnik kaloryi), prócz pracy wykonanej na drucie $q.p.l.\alpha.dT + v.p.da$.

Energija jednostki masy drutu u pojęta jako funkcyja T i p przyrasta

o $\frac{\partial u}{\partial T}dT + \frac{\partial u}{\partial p}dp$. Mamy więc równanie:

$$AdQ + v.p\alpha\, dT + v.p.da = \frac{\partial u}{\partial T}dT + \frac{\partial u}{\partial p}dp. \qquad (1)$$

Wydłużenie a na jednostkę długości obliczone, zależy od napięcia p i spółczynnika sprężystości wydłużenia E (zależnego od T), według

związku $a = \frac{p}{E}$, zależy więc od T o tyle, o ile E z temperaturą się zmienia. Równanie więc (1) możemy pisać w kształcie:

$$(2) \qquad AdQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T} - vp\alpha - vp\frac{\partial a}{\partial T}\right) dT + \left(\frac{\partial U}{\partial p} - vp\frac{\partial a}{\partial p}\right) dp.$$

$dS = \frac{AdQ}{T}$ oznacza przyrost entropii, jest więc:

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T} - vp\alpha - vp\frac{\partial a}{\partial T}\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial p} - vp\frac{\partial a}{\partial p}\right).$$

Z uwagi, że $\frac{\partial^2 S}{\partial p \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial p}$, otrzymujemy:

$$(\mathrm{I}) \ldots \quad \frac{\partial U}{\partial p} - \frac{vp}{E} = T\left\{\frac{\partial(vp\alpha)}{\partial p} + \frac{\partial\left(vp\frac{\partial a}{\partial T}\right)}{\partial p} - \frac{\partial\left(\frac{vp}{E}\right)}{\partial T}\right\}$$

$\frac{\partial U}{\partial T} - vp.\alpha - vp\frac{\partial a}{\partial T}$, jak widać z równania (2), jest ciepłem właściwem przy stałem napięciu p, wyrażonem w jednostkach pracy, piszemy je Ac_p.

Możemy więc równaniu (2) nadać kształt:

$$(\mathrm{II}) \ldots \quad AdQ = Ac_p dT + T\left\{\frac{\partial(pv\alpha)}{\partial p} + \frac{\partial\left(vp\frac{\partial a}{\partial T}\right)}{\partial p} - \frac{\partial\left(\frac{vp}{E}\right)}{\partial T}\right\} dp.$$

(a) Jeżeli założymy: $\frac{\partial(vp\alpha)}{\partial p} + \frac{\partial\left(vp\frac{\partial a}{\partial T}\right)}{\partial p} - p\frac{\partial\left(\frac{v}{E}\right)}{\partial T} = M$

otrzymujemy dla adyabatycznej zmiany:

$$(\mathrm{III}) \ldots \qquad dT = -\frac{T.M.dp}{Ac_p}.$$

W równanie (a) wprowadzić można α_p, t.j. spółczynnik rozszerzalności (w kierunku napięcia) przy stałem napięciu p. Drut o pierwotnej długości równej jedności, pod napięciem p z wydłużeniem odpowiedniem równem a, skutkiem podwyższenia temperatury o dT, powiększy swoją

długość z przyczyny rozszerzalności o αdT, skutkiem zaś powiększenia wydłużenia o $\frac{\partial a}{\partial T} dT = -\frac{p}{E^2}\frac{\partial E}{\partial T}$, jest więc $\alpha_p = \alpha + \frac{\partial a}{\partial T}$ [1]) . . . (a')

$$M = \partial \frac{(vp\alpha_p)}{\partial p} - p \frac{\partial\left(\frac{v}{E}\right)}{\partial T}.$$

$$\text{Zatem } dT = -\frac{Tdp}{Ac_p}\left\{v\alpha_p + p\frac{\partial(v\alpha_p)}{\partial p} - p\frac{\partial\left(\frac{v}{E}\right)}{\partial T}\right\} \quad . . . \text{(IV)}$$

$$= -\frac{Td_p}{Ac}\left\{v\alpha_p + p\alpha_p\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{p}{E}\frac{\partial v}{\partial T}\right\} \quad . . . . . \text{(V)}$$

Łatwo poznać, że wyrazy $p\alpha_p \frac{\partial v}{\partial p}$ i $\frac{p}{E}\frac{\partial v}{\partial T}$ są w obec wyrazu $v\alpha_a$ dla wydłużeń metali, zawsze niewielkich, nieznaczne; v można założyć $= V\left[1 + (1-2\mu)\frac{p}{E}\right]$, gdzie μ oznacza zwężenie poprzeczne, dalej $V = V_0\left[1 + 3\alpha(T - T_0)\right]$, jeżeli V_0 oznacza objętość drutu niewydłużonego przy temperaturze T_0. Zatem:

$$p\frac{\partial v}{\partial p} = V(1-2\mu)\frac{p}{E}$$

$$\frac{\partial v}{\partial T} = V_0\, 3\alpha\left[1 + (1-2\mu)\frac{p}{E}\right] - V(1-2\mu)\frac{p}{E^2}\frac{\partial E}{\partial T}.$$

[1]) Wzór ten wynika także ze związku $\alpha'_p - \alpha' = \frac{P}{a(t'-t)}\left[\frac{1}{Et'} - \frac{1}{Et}\right]$ sprawdzonego doświadczalnie przez Dahlandera (*Versuch den Ausdehnungscoefficienten von Metalldrähten bei ungleichen Spannungsgraden zu bestimmen* Pogg. Ann 145). gdzie α'_p oznacza spółczynnik rozszerzalności przy stałem napięciu, α' zwykły spółczynnik rozszerzalności, P siłę ciągnącą, a przekrój drutu, zatem $\frac{P}{a}$ nasze napięcie p, E spółczynnik sprężystości wydłużenia. Zakładając $t' - t = dT$, otrzymujemy $\alpha'_p = \alpha' - \frac{p}{E^2}\frac{\partial E}{\partial T}$, związek, który z wyprowadzonego przez nas po podstawieniu $a = \frac{p}{E}$ wprost wynika. Przeciw rozumowaniu Dahlandera podniósł Grätz (*Ueber die Abhängigkeit der Elasticität des Kautschuks von der Temperatur und ihre Beziehung zum thermischen Ausdehnungscoefficienten.* Wied. Ann. 28, str. 354) zarzuty, które nam się jednakowoż nie zdają uzasadnione.

Ponieważ $\frac{p}{E} = a$ jest zawsze bardzo małe, można wyraz drugi i trzeci w nawiasie równania (V) opuścić i, pisząc jeszcze zamiast v, $\frac{1}{\rho}$ gdzie ρ oznacza gęstość materyjału, z przybliżeniem dostatecznem dojść do równania Thomsona.

$$\text{(VI)} \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad dT = - \frac{T\alpha_p \cdot dp}{Ac_p \cdot \rho}.$$

$\alpha_p = \alpha + \frac{\partial a}{\partial T} = \alpha - \frac{p}{E} \cdot \frac{\partial E}{E \partial T}$ może być, w obec znacznego obciążenia drutu, o kilka procent większe od α, chociaż bowiem $\frac{p}{E}$ wynosi co najwięcej tysiączne części, $\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial T}$ jest znacznie większe dla metali od spółczynnika rozszerzalności α. Doświadczenia Dahlandera okazały w istocie, że, w obec stosownego napięcia, spółczynnik rozszerzalności α_p jest o kilka $^0/_0$ większy od spółczynnika rozszerzalności swobodnego drutu. We wzorze (VI), nieznaną wielkością, dotąd nieobliczoną ani doświadczalnie nieoznaczoną, jest c_p ciepło właściwe przy stałem napięciu. Z góry można się domyślać, że nie wiele różni się od ciepła właściwego pod stałem ciśnieniem; w następującym rozdziale okażemy, w jaki sposób znaleść można związek między temi ilościami [1]).

---

[1]) W rozumowaniu w niniejszym rozdziale podanem, stosowaliśmy wprost zasadę Carnota; zdawałoby się na pierwszy rzut oka korzystniejszem zastosować teoryję o swobodnej energii, tem bardziej, że ta ostatnia jest właściwie rozszerzeniem zakresu termodynamiki i w istocie swojej polega na zastosowaniu zasady Carnota do zjawisk, w których praca zewnętrzna nie koniecznie pochodzi z rozszerzania się lub kurczenia ciał poddanych jednostajnemu we wszystkich kierunkach ciśnieniu, jak w pierwszych zastosowaniach prawa Carnota — ale może być najrozmaitszym rodzajem energii. W istocie jednak teoryja o swobodnej energii stosuje się, jak to Helmholtz (Termodynamika zjawisk chemicznych tłum. Fr. Tomaszewskiego, uwaga na str. 16) wyraźnie podniósł, tylko wtedy, kiedy parametry są tak dobrane, że sama zmiana temperatury nie pociąga za sobą żadnej, dodatniej lub ujemnej pracy, jeżeli tylko inne parametry pozostają niezmienione. W naszym przypadku, nietylko że za parametry obieramy temperaturę T, i napięcie p, ale również, gdy za niezawisłe zmienne weźmiemy temperaturę i wydłużenie a, podwyższenie temperatury o dT pociąga za sobą pracę $pql\alpha dT$, nawet jeżeli a jest stałem, skutkiem samej rozszerzalności drutu w kierunku długości. Teoryja Helmholtza wymagałaby zatem pewnego rozszerzenia i zmiany, którą nie mamy zamiaru obecnie się zajmować, zanimby ją można do podobnych zjawisk stosować.

W pewnych termoelastycznych zadaniach, jeżeli n. p. chodzi o zmiany objętości ciała jednostajnemu zewsząd ciśnieniu poddanego, albo, jak sądzimy, w ogólnym przy-

II.

Związek między ciepłem właściwem przy stałem napięciu c_p, ciepłem właściwem przy stałem wydłużeniu c_a a ciepłem właściwem przy stałem ciśnieniu C.

Energija drutu zależy wyłącznie od T i p z powodu, że wszystkie inne warunki przypuszczamy niezmienne. Oznaczmy energiję, której potrzeba dostarczyć, chcąc temperaturę podwyższyć o dT i sprawić wydłużenie (jednokierunkowe) a', odpowiednie napięciu p'.

Możemy naprzód drut wyciągnąć aż do napięcia p', następnie temperaturę podnieść od T do $T + dT^0$.

Jeżeli drut jest poddany napięciu p, odkształcenie da wymaga pracy $dW_1 = v.p.da = \frac{vp}{E} dp.$

Ilość ciepła, której potrzeba dostarczyć, aby przytem temperaturę utrzymać stałą, znajdziemy z wzoru (II) w jednostkach pracy wyrażoną, zakładając $dT = 0$. Otrzymamy mianowicie:

$$AdQ_1 = TMdp.$$

Zatem energija, użyta przy powiększeniu napięcia od p do $p + dp$, wynosi ogółem $dW_1 + AdQ_1$, a energija, przy wyciągnieniu drutu aż do napięcia p' dostarczona, wyniesie:

$$\int_0^{p'} (dW_1 + AdQ_1).$$

Następnie potrzeba drut poddany już napięciu p' ogrzać od T do $T + dT^0$; jeżeli $c_{p'}$ oznacza ciepło właściwe przy stałem napięciu, wypadnie do tego użyć ilości ciepła w mierze mechanicznej wyrażonej przez $Ac_{p'} . dT$. Prócz tego musimy jeszcze policzyć ten zasób energii, który drut skutkiem wydłużenia przy tem ogrzewaniu uzyska; długość

padku przez W. Voigta (*Ueber adiabatische Elasticitätscoefficienten.* Wied. Ann. t. 36) opracowanym, dają się parametry tak obrać, aby tę trudność ominąć; w naszym przypadku uważamy jednak, że stosowanie bezpośrednie teoryi o swobodnej energii natrafia na trudność powyżej wskazaną.

Nie potrzebujemy wreszcie dodawać, że pominęliśmy zupełnie pracę przeciw ciśnieniu zewnętrznemu wykonaną skutkiem powiększenia objętości drutu, przy jego wydłużaniu w ogóle bardzo małą, w obec pracy przez napięcie wykonanej, jeżeli tylko ciśnienie zewnętrzne nie jest bardzo wielkie, jeżeli n. p. wynosi przybliżenie 1 atmosferę, jak w przypadku robionych dotąd doświadczeń.

drutu po wyciągnieniu aż do napięcia p', wynosząca l' przy temperaturze T, przyrośnie o $l'\alpha_{p'}dT$ z przyczyny podwyższenia temperatury, siła, równa napięciu pomnożonemu przez przekrój, zatem $q'.p$, wykona pracę $q'.pl'\alpha_{p'}.dT = vp'\alpha_{p'}dT$, o którą powiększy się zasob energii drutu.

W ogóle więc otrzymamy wyrażenie:

$$\text{(b)} \ldots \quad Ac_{p'}\,dT + p'v\alpha_{p'}\,dT + \int_0^{p'}(AdQ_1 + dW_1)$$

mierzące różnicę energii drutu o temperaturze $T + dT$ o napięciu p', i drutu o temperaturze T w stanie swobodnym.

Możemy jednak postępowanie odwrócić: naprzód udzielić $ACdT$ energii, gdzie C oznacza ciepło właściwe drutu niewyciągniętego pod ciśnieniem — przypuśćmy — jednej atmosfery, następnie wydłużyć drut o temperaturze $T + dT$ aż do napięcia p'.

Energija do tego procesu użyta:

$$\text{(c)} \ldots \quad ACdT + \int_0^{p'}(AdQ_1 + dW_1) + dT.\frac{\partial}{\partial T}\int_0^{p'}(AdQ_1 + dW_1)$$

jest równa energii wyrażonej wzorem (b).

Z porównania obu wyrażeń otrzymujemy:

$$c_{p'} = C + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial T}\int_0^{p'}(AdQ_1 + dW_1) - \frac{p'v\alpha_{p'}}{A}$$

czyli podstawiając za dQ_1 i dW_1 podane powyżej wyrażenia:

$$c_{p'} = C + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial T}\int_0^{p'}\left(TM + \frac{vp}{E}\right)dp - \frac{vp'\alpha_{p'}}{A}.$$

Po wykonaniu różniczkowania i łatwych uproszczeniach otrzymamy:

$$c_{p'} = C + \frac{1}{A}\left\{p'v\left(\alpha - \frac{p'}{E^2}\frac{\partial E}{\partial T}\right) + T\frac{\partial}{\partial T}\left[p'v\left(\alpha - \frac{p'}{E^2}\frac{\partial E}{\partial T}\right)\right]\right\}$$

$$- \frac{T}{A}\int_0^{p'}\frac{\partial^2\left(\frac{v}{E}\right)}{dT^2}\,pdp - \frac{vp'\alpha_{p'}}{A},$$

albo ze względu, że $\alpha - \frac{p'}{E^2}\frac{\partial E}{\partial T} = \alpha_{p'}$,

$$c_{p'} = C + \frac{1}{A}\,T\frac{\partial}{\partial T}(vp'\alpha_{p'}) - \frac{T}{A}\int_0^{p'}\frac{\partial^2\left(\frac{v}{E}\right)}{\partial T^2}\,pdp.$$

Jeżeli wreszcie za v podstawimy $V\left[1+ 1-2\mu) \frac{p'}{E}\right]$,

pamiętając, że V nie zależy od p', dojdziemy do związku:

$$c_{p'} = C + \frac{1}{A}\left\{ T\frac{\partial}{\partial T}(p'v\alpha_{p'}) - T\frac{p'^2}{2}\frac{\partial^2 \frac{V}{E}}{\partial T^2} - T\frac{(1-2\mu)}{3}p'^3\frac{\partial^2 \frac{V}{E}}{\partial T^2}\right\}.$$

Z ostatniego związku łatwo można się przekonać, że dla metali $c_{p'}$ różni się bardzo nieznacznie od C.

Dla miedzi n. p. mamy $C = 0{\cdot}095$, $V = \frac{1}{\rho}$, gdzie ρ gęstość $8{\cdot}9$, $\alpha = 0{\cdot}0000169$.

Z doświadczeń Wertheima [1]) znaleść można zależność E od T.

$$E_{13^\circ} = 1033.10^9, \quad E_{100} = E_{13^\circ}[1 + a(100-13)^2 + b(100-13)]^2$$
$$= 965.10^9$$
$$a = -2{\cdot}382{\cdot}10^{-4}, \quad b = 5{\cdot}947{\cdot}10^{-6}.$$

Dla obciążenia 2·5 kg. drutu o średnicy 0·706 mm. znajdujemy:

$$p' = 6{\cdot}2{\cdot}10^5 \frac{dyn}{cm^2}, \quad \alpha_{p}' = 0{\cdot}0000173.$$

Dokładność powyższych oznaczeń wystarcza, aby z wszelką pewnością podać górną granicę $c_{p'}$. Z rachunku wypada, że $c_{p'}$ ciepło właściwe przy podanem napięciu jest większe od C ciepła właściwego przy stałem ciśnieniu 1 atmosfery mniej niż o $0{\cdot}00001$ część tej ostatniej wielkości.

W podobny sposób prawo zachowania energii pozwala również znaleść ciepło właściwe przy stałem wydłużeniu a'.

Równanie: $AdQ + pv\alpha\, dT + pvda = \frac{\partial U}{\partial T}dT + \frac{\partial U}{\partial a}da$ wyraża,

[1]) Wertheim. *Untersuchungen über die Elasticität. 1. Von der Elasticität und Cohäsion der Metalle.* Pogg. Ann. Erg. Band 2, str. 61.

że ciepło udzielone wraz z pracą na drucie wykonaną, jest równe przyrostowi energii drutu $\overline{U}$ [1]), uważanej jako funkcyja T i a.

Przyrost entropii oznacza:

$$dS = \frac{AdQ}{T} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial T} - pv\alpha\right) dT + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial a} - pv\right) da.$$

W znany sposób zakładając:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial a}$$

otrzymamy:

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial a} - pv = T\left\{\frac{\partial(\overline{pv\alpha})}{\partial a} - \frac{\partial(\overline{pv})}{\partial T}\right\},$$

zatem:

$$(e)\ldots \qquad AdQ = Ac_a\, dT + T\left\{\frac{\partial(\overline{pv\alpha})}{\partial a} - \frac{\partial(\overline{pv})}{\partial T}\right\} da,$$

gdzie $c_a = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial a} - pv\alpha\right)$ oznacza ciepło właściwe przy stałem wydłużeniu a.

Z równania (e) wynika, że jeżeli temperatura drutu ma pozostać niezmienną, odkształcenie zaś ma powiększyć się o da, do pracy wynoszącej: $pvda = dW'$, potrzeba jeszcze dołączyć pewien zasób energii w postaci ciepła, wynoszący:

$$(f)\ldots. \qquad AdQ = T\left\{\frac{\partial(\overline{pv\alpha})}{\partial a} - \frac{\partial(\overline{pv})}{\partial T}\right\}.$$

Drut odkształcamy aż do wydłużenia a', następnie ogrzewamy o dT^0. Energiję w ciągu tego procesu dostarczoną możemy pojąć jako złożoną z trzech części. Naprzód do wydłużenia potrzeba energii:

$$\int_0^{a'} (dW' + AdQ'),$$

dalej do ogrzania ciepła $c_{a'}.\,dT$, wreszcie, z przyczyny powiększenia długości drutu skutkiem ogrzania o dT^0, został drutowi udzielony zasób energii $p'v\alpha$, gdzie α oznacza zwykły spółczynnik rozszerzalności, ponieważ przy tem powiększeniu długości, wydłużenie a' (napięciem p' sprawione) nie doznaje zmiany.

---

[1]) Przez kreskę ponad U lub innemi ilościami położoną oznaczamy, że ilości te pojmujemy jako funkcyje niezależnych zmiennych T i a.

Wynika ztąd, że energija drutu o temperaturze $T + dT^0$ odkształconego do wydłużenia a' przewyższa energiję drutu swobodnego o temperaturze T^0 o ilość:

$$Ac_{a'} . dT + \int_0^{a'} (dW' + AdQ') - p'v\alpha .$$

Tę samą wielkość w innej postaci znajdziemy, jeżeli drut naprzód ogrzejemy o dT^0, później poddamy wydłużeniu. Energija użyta w tym razie do zmiany stanu drutu wynosi:

$$ACdT + \int_0^{a'} (dW' + AdQ') + dT . \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{a'} (dW' + AdQ') .$$

Z porównania tych wyrażeń otrzymujemy:

$$c_{a'} = C + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^{a'} (dW' + AdQ') - \frac{p'v\alpha}{A} .$$

Korzystając ze związku (f), podstawiając dalej wartość za dW', po łatwych uproszczeniach dochodzimy do równań:

$$c_{a'} = C + \frac{1}{A} T \frac{\partial}{\partial T} (p'v\alpha) - \frac{1}{A} T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \int_0^{a'} pvda \ldots \quad \text{(g)}$$

albo ze względu, że $p = Ea$:

$$c_{a'} = C + \frac{a'}{A} T \frac{\partial (vE\alpha)}{\partial T} - \frac{1}{A} T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \int_0^{a'} vE . ada \quad \ldots . \quad \text{(h)}$$

dalej po podstawieniu $v = V[1 + (1 - 2\mu)a']$, jeżeli μ jak poprzednio uważamy za niezależne od T, otrzymujemy równanie:

$$c_{a'} = C + \frac{a}{T} \frac{\partial (VE\alpha)}{\partial T} + \frac{a'^2}{A} \left\{ (1 - 2\mu) T \frac{\partial (VE\alpha)}{\partial T} - \frac{T}{2} \frac{\partial^2 (VE)}{\partial T^2} \right\}$$
$$- \frac{a'^3}{3A} (1 - 2\mu) T \frac{\partial^2 (VE)}{\partial T^2} \quad \ldots . . \quad \text{(i)}$$

Jeżeli obliczymy stosunek c_p / c_a, znajdziemy wyrażenie odmienne od podanego przez W. Thomsona [1]). Najłatwiej otrzymać można ten stosunek, wychodząc z równania:

[1]) W. Thomson. *Elasticity*.

$$AdQ = Ac_a\, dT + T \left\{ \frac{\partial\,(\overline{pv\alpha})}{\partial a} - \frac{\partial\,(\overline{pv})}{\partial T} \right\} da$$

i zmieniając zmienne niezależne na T i p, t. j. podstawiając

$$da = \frac{\partial a}{\partial T}\, dT + \frac{\partial a}{\partial p}\, dp.$$

Otrzymamy w ten sposób:

$$AdQ = \left[Ac_a + T \left\{ \frac{\partial(\overline{pv\alpha})}{\partial a} - \frac{\partial\,(\overline{pv})}{\partial T} \right\} \frac{\partial a}{\partial T} \right] dT + \ldots,$$

ztąd ze względu na równanie:

$$AdQ = Ac_p\, dT + \{\ \ldots\ \}\, dp,$$

(k) . . . $$c_p = c_a + \frac{T}{A} \left\{ \frac{\partial(\overline{pv\alpha})}{\partial a} - \frac{\partial(\overline{pv})}{\partial T} \right\} \frac{\partial a}{\partial T}.$$

Z ostatniego związku, podstawiwszy $\frac{\partial a}{\partial T} = -\frac{p}{E^2}\frac{\partial E}{\partial T}$, dochodzimy do równań:

(l) $$\begin{cases} \dfrac{c_p}{c_a} = 1 - \dfrac{TN}{Ac_a}\dfrac{p}{E^2}\dfrac{\partial E}{\partial T} \\[2ex] \quad = \dfrac{1}{1 + \dfrac{T}{Ac_p}\dfrac{Np}{E^2}\dfrac{\partial E}{\partial T}} \\[2ex] \text{gdzie } N = \dfrac{\partial\,(\overline{pv\alpha})}{\partial a} - \dfrac{\partial\,(\overline{pv})}{\partial T}. \end{cases}$$

Stosunek c_p / c_a zależy, jak widać z wzorów (l), od napięcia p.

To samo wyrażenie otrzymamy na stosunek adyabatycznego do izotermicznego spółczynnika sprężystości wydłużenia.

Aby znaleźć spółczynnik adyabatyczny, należy zauważyć, że do spółczynnika izotermicznego E potrzeba dodać odpowiedni przyrost napięcia, pochodzący ztąd, że przy wydłużeniu temperatura się obniża, a zatem sprężystość skutkiem tego się powiększa, t. j. potrzeba dodać $\frac{\partial p}{\partial T}$ pomnożone przez przyrost temperatury, obliczony na jednostkę wydłużenia $\frac{\partial T}{\partial a}$. Adyabatyczny spółczynnik E' można zatem wyrazić związkiem:

$$E' = E + \frac{\partial p}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial a} \quad \ldots\ldots \quad \text{(m)}$$

Ponieważ zaś $\frac{\partial T}{\partial a} = - \frac{TN}{Ac_a}$, jak wynika z wzoru (e), jeżeli wartość N weźmiemy z równań (1') i zważymy, że dla adyabatycznych zmian stanu $dQ = 0$, równaniu (m) można dać kształt:

$$E' = E - a. \frac{\partial E}{\partial T} \frac{TN}{Ac_a} = E - \frac{p}{E} \frac{\partial E}{\partial T} \cdot \frac{TN}{Ac_a},$$

$$\text{zkąd:} \ \frac{E'}{E} = 1 - \frac{TN}{Ac_a} \frac{p}{E^2} \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{c_p}{c_a} \quad \ldots\ldots \quad \text{(n)}$$

W. Thomson, wychodząc z równania $c_p / c_a = \frac{E'}{E}$, obliczył ten stosunek ciepła właściwego przy stałem wydłużeniu, wyrażenie jednak przezeń otrzymane jest odmienne od przytoczonego. Przyczyną tej różnicy jest odmienne pojęcie adyabatycznego spółczynnika sprężystości i, jak okażemy, milcząco przyjęta odmienna definicyja ciepła właściwego przy stałem wydłużeniu [1]).

Skutkiem wydłużenia obniża się temperatura, co pociąga za sobą nie tylko powiększenie spółczynnika sprężystości, ale zarazem zmniejszenie objętości ciała sprężystego, a zatem także zmniejszenie jego długości.

Wydłużenie (na jednostkę pierwotnej długości liczone) jest $\frac{p}{E}$, jeżeli odkształcenie jest izotermiczne, jest zaś, w myśl Thomsona, mniejsze o $\alpha_p . \Theta$, gdzie Θ oznacza obniżenie temperatury wydłużeniem sprawione, jeżeli odkształcenie jest adyabatyczne. W tym więc ostatnim razie wynosi $\frac{p}{E} - \alpha_p . \Theta$. Z tego założenia, podstawiając: $\Theta = \frac{T . \alpha_p . p}{A . c_p . \rho}$, otrzymuje Thomson związek:

---

[1]) W artykule W. Thomsona „*Elasticity* (*reprint of Encycl. Britan.*) (str. 19 i 20) wyprowadzenie wzoru na stosunek $\frac{E'}{E}$, oznaczonego tam przez M' / M, nie jest wprawdzie w całej rozciągłości podane, w myśl jednak dyskusyi w tym ustępie podanej łatwo je uzupełnić. Podejmujemy to dla tego, aby wykazać dokładnie różnicę w definicyi adyabatycznego spółczynnika i ciepła właściwego przy stałem wydłużeniu, przyjętej przez Thomsona, a wypływającej z analizy przez nas podawanej.

$$(o) \ldots \quad \frac{E'}{E} = \frac{1}{1 - \frac{T.\alpha_p{}^2.E'}{A.c_p.\rho}},$$

który posłużył do obliczenia wartości $\frac{c_p}{c_a} = \frac{E'}{E}$ [1]) dla drutów metalowych, poddanych pewnemu napięciu.

Wartościom tak obliczonym służy też za podstawę odpowiednia definicyja ciepła właściwego przy stałem wydłużeniu. Energiję drutu potrzeba pojąć jako zależną od temperatury T i długości l, założyć:

$$(p) \ldots \quad AdQ = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial l} dl - qpdl,$$

uważać dalej $\frac{\partial U}{\partial T}$ za ciepło właściwe przy stałem odkształceniu Ac_a:

$$(q) \ldots \quad \frac{\partial U}{\partial T} = Ac_a,$$

nadać więc związkowi (p) kształt:

$$AdQ = Ac_a dT + \left(\frac{\partial U}{\partial l} - qp\right) dl.$$

Zmiana zmiennych niezależnych prowadzi do równań:

$$AdQ = \left\{ Ac_a + \left(\frac{\partial U}{\partial l} - qp\right)\frac{\partial l}{\partial T} \right\} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial l} - qp\right)\frac{\partial l}{\partial p} dp$$

$$= \left\{ Ac_a + \left(\frac{\partial U}{\partial l} - qp\right) l\alpha_p \right\} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial l} - qp\right)\frac{\partial l}{\partial p} dp$$

$$(r) \quad = Ac_p.dT + \left(\frac{\partial U}{\partial l} - qp\right)\frac{\partial l}{\partial p} dp,$$

$$(s) \quad \text{zatem: } Ac_p = Ac_a + \left(\frac{\partial U}{\partial l} - qp\right) l\alpha_p.$$

Ostatni związek (s) można dalej przekształcić przez podstawienie za $\left(\frac{\partial U}{\partial l} - pq\right) l\alpha_p$, wartości łatwo dającej się znaleść. Z równania (r) wynika, że $\left(\frac{\partial U}{\partial l} - qp\right)\frac{\partial l}{\partial p} dp$ oznacza ilość ciepła, w jednostkach pracy

---

[1]) l. c. str. 20.

mierzoną, potrzebną przy powiększeniu napięcia o dp do utrzymania stałości temperatury. Ilość tę można oznaczyć ze związku:

$$dT = \frac{T.\alpha_p.dp}{A.c_p.\rho},$$

określającego zniżkę temperatury, adyabatycznem powiększeniem napięcia o dp sprawioną. Ta ilość ciepła jest oczywiście równa $Ac_p.dT$, ztąd:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l} - qp\right)\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{T.\alpha_p}{\rho}.$$

Zważywszy jeszcze, że: $\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{l}{E}$, otrzymujemy:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l} - qp\right) l\alpha_p = \frac{T.E\alpha_p^2}{\rho}.$$

Po podstawieniu tego wyrażenia równanie (s) pisać można w kształcie:

$$Ac_p\left(1 - \frac{E.T.\alpha_p^2}{A.c_p.\rho}\right) = Ac_a,$$

zkąd:

$$\frac{c_p}{c_a} = \frac{1}{1 - \frac{T.E.\alpha_p^2}{Ac_p\rho}} = \frac{E'}{E}$$

ze względu na związek (o).

W ten sposób można uzyskać wzory przez W. Thomsona znalezione na podstawie podanego przez niego rozumowania [1]). Wypada jednak zaznaczyć, że w ogóle energija jednostki masy drutu w jednym kierunku wydłużonego przez samą temperaturę i długość drutu nie jest jeszcze zdefinijowaną; w tym celu potrzeba jeszcze podać jego przekrój. Wystarcza natomiast podać temperaturę i wydłużenie na jednostkę pierwotnej długości liczone, aby określić energiję jednostki masy drutu żadnym innym odkształceniom, prócz wydłużenia, niepoddanego. Wystarczą zatem używane przez nas niezależne zmienne: temperatura T i wydłużenie a, lub temperatura i napięcie p.

Łatwo dalej spostrzedz, że związek (q) wyrażający: $\frac{\partial U}{\partial T} = Ac_a$, po obraniu za zmienne niezależne temperatury i długości drutu, można uważać tylko za przybliżony, gdyż, jak z równania (p) wynika, $\frac{\partial U}{\partial T}$ ma

---

[1]) l. c str. 19 i 20.

w tym razie znaczenie ciepła właściwego przy stałej długości drutu w jednostkach pracy wyrażonego, a nie przy stałem wydłużeniu; wypadałoby zatem pisać $\frac{\partial U}{\partial T} = Ac_l$, aby otrzymać zupełnie ścisły związek.

Podobnie też co do adyabatycznego spółczynnika sprężystości nie trudno wykazać, że w rozumowaniu Thomsona nie jest ściśle oddzielone równomierne pomniejszenie wymiarów ciała, a zatem także pomniejszenie jego długości od jednokierunkowego wydłużenia napięciem sprawionego. Jeżeli wydłużenie odbywa się izotermicznie, wynosi $\frac{p}{E}$, jeżeli jest adyabatyczne wynosi mniej, ale ściśle biorąc, z powodu zniżki temperatury o Θ, nie zmniejszyło się o $\alpha_p . \Theta$; o tę ostatnią wielkość zmniejszyła się właściwie jednostka długości drutu, podobnie jak zmniejszyły się także wymiary przekroju drutu. Spółczynnik rozszerzalności α_p zależy wprawdzie [1]) od zmienności spółczynnika sprężystości z temperaturą, t. j. od $\frac{\partial E}{\partial T}$, dla zwykłych napięć zależy on jednak w nierównie większej mierze od zwykłego spółczynnika rozszerzalności α, a pomniejszenie długości, pochodzące z równej we wszystkich kierunkach rozszerzalności, nie wpływa na jednokierunkowe wydłużenie, zależne wyłącznie od spółczynnika sprężystości wydłużenia i napięcia. Analiza poprzednio podana liczy się z tą okolicznością i dla tego prowadzi do równań odmiennych od wzorów Thomsona, do odmiennego mianowicie wyrażenia na stosunek adyabatycznego do izotermicznego spółczynnika sprężystości. Podobnie rzecz się ma z stosunkiem c_p / c_a. Wzory W. Thomsona odnoszące się właściwie do innego rodzaju odkształceń, do równomiernego we wszystkich kierunkach zmniejszania objętości pod wpływem jednakowego ze wszystkich stron ciśnienia, zastosowane przez analogiję do wydłużenia drutów w jednym kierunku, stosują się tylko w przybliżeniu. Związek (n) znaleziony przez nas i związek (o) podany przez W. Thomsona, o tyle zresztą prowadzą do niewiele różnych wartości stosunku c_p / c_a, że z obu wypadają wartości bliskie jedności. Dla małych napięć różnica jest większa niż dla większych; dla napięcia 1 gm. na cm^2 otrzymujemy z równania (n) dla miedzi o temperaturze 15° C $\frac{c_p}{c_a} = 1{\cdot}000000000033$, kiedy z równania Thomsona wypada $\frac{c_p}{c_a} = 1{\cdot}00325$ [2]). Według związku

---

[1]) Równanie (a') w I ustępie.

[2]) l. c. str. 20.

(n), c_p / c_a jest równe wyrażeniu $1 - \frac{TN}{c_a} \frac{p}{E^2} \frac{\partial E}{\partial T}$, którego drugi wyraz jest proporcyjonalny do p, a zatem stosunkowo bardziej z napięciem rośnie aniżeli ułamek $\frac{1}{1 - \frac{T \cdot E \alpha_p^2}{A c_q \rho}}$ równy według (o) c_p / c_a, którego mianownik o tyle tylko od p zależy, o ile c_p i α_p z napięciem małym zmianom ulegają.

III.

Obliczenie mechanicznego równoważnika kaloryi z doświadczeń Edlunda.

Z poprzedzających ustępów wynika, że wzór W. Thomsona z dostatecznem przybliżeniem powinien dawać zmianę temperatury wskutek adyabatycznego wydłużenia drutu. Wynika dalej, że ciepło właściwe przy stałem napięciu bardzo niewiele różni się od ciepła właściwego w zwykłem rozumieniu, t. j. przy stałem ciśnieniu, równem jednej atmosferze. Ztąd okazuje się, że wzór Thomsona, nawet w tym razie, jeżeli zamiast odpowiedniego tu ciepła właściwego użyjemy do obliczenia ciepła właściwego przy stałem ciśnieniu, a zamiast spółczynnika rozszerzalności przy stałem napięciu podstawimy wielkość tego spółczynnika odnoszącą się do swobodnego drutu, powinien w bliskiem przybliżeniu zgadzać się z obserwowanemi zjawiskami. Nie można więc utrzymywać, aby ta okoliczność, że Edlund [1]), obliczając swoje doświadczenia, w celu oznaczenia mechanicznego równoważnika kaloryi wykonane, używał za spółczynnik rozszerzalności i ciepło właściwe zwykłych wartości dla stali znalezionych, była przyczyną, iż doświadczenia te dały na mechaniczny równoważnik ciepła wartość tak znacznie większą od wszystkich innych oznaczeń, jak 682 kilogrammetrów. Dowodzą tego także doświadczenia przez Hagę [2]) i Wassmutha [3]) dokonane, które, chociaż do ich obliczenia podobnych uproszczeń użyto, wcale dobrze zgadzają się z wymaganiami teoryi. Doświadczenia Edlunda były jednak tyle razy przed-

---

[1]) Edlund. Pogg. Ann. 126.
[2]) Wied. Ann. 15.
[3]) Exner. *Repertorium* t. 24, r. 1888.

miotem dyskusyi [1]), tyle razy próbowano wyjaśnić przyczynę ich osobliwych rezultatów, że uważamy za rzecz interesującą okazać, iż doświadczenia te z pewną zmianą w obliczeniu nie prowadzą do rezultatów tak niezgodnych z teoryją lub dobrze znanemi faktami. EDLUND mierzył obniżenie temperatury za pomocą termoelementu do drutu przyłożonego [2]). Ponieważ prąd elektryczny nie był stały, gdyż w miejscu, gdzie termoelement dotykał wydłużonego drutu, ciepło z otoczenia napływało, przeto pomiar temperatury opierał się z jednej strony na oznaczeniu chwilowego odchylenia igły galwanometru, z drugiej strony prędkości ogrzewania drutu przez wydłużenie nieco oziębionego.

Całkowanie równania:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - mx + q \frac{v}{wc} - 2n \frac{dx}{dt},$$

w którem x oznacza odchylenie igły, m zależy od jej siły kierunkowej i jej momentu bezwładności, wreszcie n spółczynnik zależny od tłumienia igły, v przewyżkę ciepła drutu, w ciężar, c ciepło właściwe drutu, prowadzi do związku:

$$\text{(A)} \ldots \quad \frac{x \cdot \frac{a}{wc} \cdot e^{nT} \sqrt{m - n^2}}{\sin(T\sqrt{m-n^2})} = \frac{qv_0}{wc}$$

dla pierwszego największego odchylenia x; odpowiedni czas T, od chwili zamknięcia prądu liczony, należy przytem obliczyć z równania:

$$\text{(B)} \ . \cos(T\sqrt{m-n^2})e^{-nT} + \frac{m - \frac{a}{wc}n}{\frac{a}{wc}\sqrt{m-n^2}} \sin(T\sqrt{m-n^2})e^{-nT}e^{-\frac{a}{wc}T} = 0,$$

a jest zdefinijowane równaniem:

$$dv = - a \cdot \frac{v}{wc} \, dt,$$

gdzie dt element czasu, jest więc ubytkiem ilości ciepła drutu w jednostce czasu w razie, jeżeli zwyżka temperatury drutu ponad otoczenie $\frac{v}{wc}$ jeden stopień wynosi.

---

[1]) VERDET. *Theorie mécanique de la chaleur*, St. ROBERT. *Ann. de chimie et de phys.* 4 S. V. 14, DAHLANDER Pogg. Ann. 145, RÜHLMANN. *Mechanische Wärmetheorie.*

[2]) Aby naszego wywodu nie przedłużać, naszkicujemy tu tylko sposób obliczania EDLUNDA; dokładniejszych informacyj w rozprawie EDLUNDA łatwo zasięgnąć.

Obniżenie temperatury $\frac{v_0}{wc}$ dla $t = 0$ oblicza się według wzoru (A). Potrzebna do tego znajomość $\frac{a}{wc}$ prędkości, z jaką drut się ogrzewa; Edlund sprawdza związek:

$$v = v_0 e^{-\frac{a}{wc} t}$$

szuka wielkości $\frac{a}{wc}$ w następujący sposób: galwanometr okazuje odchylenie mniejsze, jeżeli prąd jest zamknięty w 6 sekund po ukończeniu wydłużenia, aniżeli kiedy jest zamknięty bezpośrednio po nim. Dla drutu stalowego, służącego do oznaczenia zniżki temperatury, znajduje Edlund te odchylenia 18·609 i 26·229, a ztąd $\frac{a}{wc} = 0{\cdot}05776$. Należy jednak zwrócić uwagę na tę jeszcze okoliczność, że, jeżeli prąd jest zamknięty od początku wydłużenia trwającego 2^s, odchylenie wynosi 31·909. Te doświadczenia okazują zatem, że drut powraca prędzej do pierwotnej temperatury, którą przed wydłużeniem posiadał, jeżeli łącznik termoelementu jest zamknięty i prąd przepływać może, aniżeli, jeżeli ten łącznik jest otwarty. Pomyłka Edlunda polega na tem, że tej różnicy nie dostrzegł i w równanie (A) za prędkość ogrzewania drutu wydłużeniem oziębionego, t. j. za $\frac{a}{wc}$, podstawił wielkość odpowiadającą łącznikowi otwartemu, a nie, jak właściwie wypada, prędkość odpowiednią łącznikowi zamkniętemu. Wielkosć tej ostatniej obliczyliśmy; otrzymujemy z podanych wychyleń galwanometru 31·909 i 26·229 ze względu na czas trwania wydłużenia, który 2^s wynosił, równą 0·10114, zatem od 0·05776 znacznie różną. Odpowiedni czas wychylenia igły galwanometru T wypada z równania (B) 18^s·7 (zamiast 20^s·56). Zmienia to bardzo znacznie rezultat, zamiast 682 kg. m. wynika z doświadczeń Edlunda na mechaniczny równoważnik kaloryi 460 kg. m. Wartość ta jest wprawdzie większa od wszystkich innych oznaczeń wypróbowanemi metodami robionych, nie można jednak wymagać lepszej zgodności ze względu, że do obliczenia użyto wartości $\frac{a}{wc}$, niezawodnie nie dość dokładnie znalezionej. Oznaczenie bowiem tej wielkości zależy od pomiaru czasu trwania wydłużenia około 2^s, nie dość dokładnie oznaczonego, który Edlundowi do obliczenia doświadczeń nie służył i nie był z odpowiednią dokładnością mierzony. Że istotnie podane tu obliczenie doświadczeń Edlunda

jest trafne, gdyby nawet poprzedzające dowody nie wystarczały, przekonywa jeszcze ta okoliczność, że doświadczenia Hagi i Wassmutha do dobrych doprowadziły rezultatów. W tych doświadczeniach prędkość ogrzewania drutu adyabatycznem wydłużeniem oziębionego, t. j. wartość $\frac{a}{wc}$, była o wiele mniejszą (0·01 w doświadczeniach Hagi, 0·03 w doświadczeniach Wassmutha). O wiele więc mniej wpływała na odchylenie galwanometru, a dokładne jej oznaczenie nie było w tej mierze potrzebne, jak w doświadczeniach Edlunda.

Z podanego wyjaśnienia omawianych doświadczeń wynika jeszcze fakt następujący: Drut lub w ogóle kawałek metalu w zetknięciu z łącznikiem z różnych metali złożonym tak, aby tworzył termoelement oziębiony poniżej temperatury otoczenia, ogrzewa się prędzej, jeżeli ten łącznik jest zamknięty, aniżeli, kiedy jest przerwany. Nie potrzeba dodawać, że fakt ten jest w zgodzie ze znanemi zjawiskami ruchu ciepła wraz z ruchem elektryczności, że jest właściwie nieuniknionem następstwem zjawiska Pettiera.

Lwów, Szkoła Politechniczna w Maju 1890 r.